CONJUNTOS COMPACTOS

Teorema de Heine-Borel

En el año 1895, Émile Borel encontró una propiedad de los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$, la cual generó un concepto muy importante en el Análisis Matemático, el de conjunto compacto.

Borel estaba atacando un problema de continuación analítica de una función de variable compleja y, como parte de su razonamiento, demostró un resultado, el cual, simplificado para el caso de un intervalo $[a, b]$ de números reales, se puede enunciar como sigue:

Si $I_1, I_2, \ldots$ es una familia infinita numerable de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes es menor que la longitud del intervalo $[a, b]$, entonces la unión de todos los intervalos I_n no cubre al intervalo $[a, b]$.

Para probar lo anterior, Borel demostró que si la unión de los intervalos I_n cubriera al intervalo $[a, b]$, entonces existiría un subcolección finita $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_m}$, de esos intervalos, cuya unión cubriría a $[a, b]$ y entonces se tendría:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq \sum_{k=1}^{m} l\left(I_{n_k}\right) \geq b - a$$

La existencia de una colección finita de intervalos que cubren a $[a, b]$, partiendo de que la unión de la colección infinita lo cubre, lo demostró Borel de la siguiente manera:

Sea:

$$A = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ es cubierto por una colección finita de intervalos } I_n\}$$

El conjunto A es distinto del vacío ya que $a \in A$. Además, está acotado por b. Por lo tanto, A tiene un supremo que llamaremos s.

Como $a \in A$ y b es cota superior de A se tiene $a \leq s \leq b$.

Como $s \in [a, b]$, hay un intervalo $I_k = (a_k, b_k)$ al cual pertenece s. Siendo s el supremo de A, existe $x \in A$ tal que $x \in (a_k, s]$. Como $x \in A$, hay una colección finita de intervalos I_n cuya unión cubre al intervalo $[a, x]$. Entonces agregándole a esa familia el intervalo I_k, obtenemos una colección finita de intervalos I_n cuya unión cubre al intervalo $[a, s]$; así que $s \in A$.

Sea $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_m}$ una colección finita de intervalos I_n cuya unión cubre el intervalo $[a, s]$ y sea $I_{n_j} = \left(a_{n_j}, b_{n_j}\right)$ uno de esos intervalos al cual pertenece s. Si se tuviera $s < b$, entonces el intervalo $[s, c) = \left[s, b_{n_j}\right) \cap [s, b)$ sería distinto del vacío. Tomando cualquier $y \in (s, c)$ se tendría $s < y < b_{n_j}$, así que la unión de los intervalos $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_m}$ también cubriría al intervalo $[a, y]$. Como $(s, c) \subset [a, b]$, se tendría $y \in [a, b]$ y, por lo tanto, $y \in A$, lo cual no es posible ya que $s < y$ y s es el supremo de A. Por lo tanto, se tiene $s = b$. Así que la unión de los intervalos $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_m}$ cubre al intervalo $[a, b]$.

Años más tarde, se encontraría un resultado más general, al cual ahora se le conoce como teorema de Heine-Borel.

De manera general, si (X, d) es un espacio métrico, vamos a utilizar las siguientes definiciones:

Definición 1. *Diremos que $K \subset X$ es compacto si para cualquier familia infinita $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, existe un conjunto finito $T \subset \Gamma$ tal que $K \subset \bigcup_{\gamma \in T} G_\gamma$.*

Definición 2. *Diremos que $K \subset X$ es numerablemente compacto si para cualquier familia infinita numerable $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, existe un conjunto finito $T \subset \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{n \in T} G_n$.*

Definición 3. *Diremos que $K \subset X$ es secuencialmente compacto si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de K existe una subsucesión que converge a algún elemento de K.*

Definición 4. *Diremos que una familia de subconjuntos de X, $\{F_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, tiene la propiedad de la intersección finita si dado cualquier subconjunto finito $T \subset \Gamma$, se tiene $\bigcap_{\gamma \in T} F_\gamma \neq \emptyset$.*

Definición 5. *Diremos que $A \subset X$ es acotado si existe una bola abierta que lo contiene.*

Definición 6. *Diremos que $A \subset X$ es totalmente acotado si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito de bolas cerradas de radio ε cuya unión cubre A.*

El teorema de Heine-Borel asegura que en $\mathbb{R}^n$, con la métrica usual, si K es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, cerrado y acotado, entonces K es compacto.

El inverso de este resultado también es válido; es decir, si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ entonces K es cerrado y acotado.

Combinando estos dos resultados, podemos decir que, en $\mathbb{R}^n$, con la métrica usual, un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Pasemos a demostrar estos resultados.

Definición 7. *Llamaremos celda de* $\mathbb{R}^n$ *a un conjunto de la forma* $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$*, donde* $I_1 = [a_1, b_1]\,,\ I_2 = [a_2, b_2]\,, \cdots, I_n = [a_n, b_n]$ *son intervalos cerrados y acotados de números reales tales que, para cualquier* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*,* $a_j < b_j$ *.*

Definición 8. *Si* $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de celdas de* $\mathbb{R}^n$*, diremos que éstas están anidadas si* $C_{k+1} \subset C_k$ *para cualquier* $k \in \mathbb{N}$*.*

Proposición 1. *Sea* $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de celdas anidadas de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $\cap_{m=1}^{\infty} C_m \neq \emptyset$*.*

Demostración

Sea $I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$ la celda C_m; entonces, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, los intervalos $I_j^{(1)}$, $I_j^{(2)}$, $I_j^{(3)}$, $\ldots$ forman una sucesión anidada de intervalos cerrados y acotados; por lo tanto, existe un número real x_j en la intersección de todos ellos. Evidentemente, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, el vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ perternece a la celda C_m.

$\blacksquare$

Proposición 2 (Teorema de Heine-Borel)**.** *Si* K *es un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*, cerrado y acotado, entonces* K *es compacto.*

Demostración

Sea $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ y denotemos por $\mathbb{U}$ a la familia de todos los subconjuntos finitos Γ.

Supongamos que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{u\in U} G_u$.

Como K es acotado, existe una celda $I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)}$ que lo contiene, a la cual llamaremos C_1. Podemos tomarla de tal forma que los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tengan la misma longitud, la cual denotaremos por L.

Vamos a construir, inductivamente, una sucesión $(C_m)_{m\in\{2,3,\ldots\}}$ de celdas tales que, para cualquier $m \in \{2,3,\ldots\}$:

i) $C_m \subset C_{m-1}$.

ii) $K \cap C_m \neq \emptyset$ y no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_m \subset \bigcup_{u\in U} G_u$.

iii) Si $C_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$, entonces, para cualquier $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $l\left(I_j^{(m)}\right) = \frac{1}{2^{(m-2)}}L$.

Definiendo $C_2 = C_1$, C_2 cumple con las condiciones i ii y iii.

Tomemos ahora $k \in \{2,3,\ldots\}$ y supongamos que tenemos definida una celda $C_k = \left[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}\right] \times \left[a_2^{(k)}, b_2^{(k)}\right] \times \cdots \times \left[a_n^{(k)}, b_n^{(k)}\right]$ satisfaciendo las propiedades i ii y iii.

Para cada $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, denotemos por $c_j^{(k)}$ al punto medio del intervalo $\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$. De esta forma, en cada coordenada j tenemos los intervalos $\left[a_j^{(k)}, c_j^{(k)}\right]$ y $\left[c_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$. Tomando en cada coordenada uno de esos dos intervalos y considerando el producto cartesiano de ellos, formamos una celda. El total de celdas que podemos formar de esa manera es igual a 2^n y si $C = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ es cualquiera de esas celdas, se tiene $C \subset C_k$ y, para cualquier $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, se tiene:

$$l\left(I_j\right) = \tfrac{1}{2}l\left(\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]\right) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2^{(k-2)}}L = \tfrac{1}{2^{(k-1)}}L$$

Sabemos que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_k \subset \bigcup_{u\in U} G_u$, así que, por lo menos para una de las 2^n celdas que formamos, llamémosla C, se tiene que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C \subset \bigcup_{u\in U} G_u$, porque si para cualquiera de las 2^n celdas se tuviera la propiedad contraria, existiría un conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_k \subset \bigcup_{u\in U} G_u$. Para esa celda C se tiene $K \cap C \neq \emptyset$ ya que de otra forma se tendría $K \cap C \subset G_\gamma$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, lo cual contradice la propiedad con la que elegimos a C.

Definamos entonces C_{k+1} como una cualquiera de esas celdas C, entre las 2^n celdas que formamos, con la propiedad de que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C \subset \bigcup_{u\in U} G_u$.

La celda C_{k+1} así definida satisface entonces las propiedades i, ii y iii.

Así que, por el principio de inducción matemática, para cada $m \in \{2,3,\ldots\}$, queda definida cada una de las celdas C_m satisfaciendo las propiedades i, ii y iii.

Denotemos por $L^{(m)}$ a la longitud común, igual a $\frac{1}{2^{(m-2)}}L$, de cada uno de los intervalos $I_j^{(m)}$ que componen la celda C_m.

Por la propiedad i, las celdas de la sucesión $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que hemos construido están anidadas, así que $\cap_{m=1}^{\infty} C_m \neq \emptyset$. Esta intersección es un conjunto formado por un único punto, ya que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pertenecen a esa intersección, entonces, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y cualquier $m \in \{2, 3, \dots\}$, x_j y y_j pertenecen al intervalo $I_j^{(m)}$ cuya longitud es igual a $L^{(m)}$; así que $|y_j - x_j| \leq L^{(m)} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L$ para cualquier $m \in \{2, 3, \dots\}$ y, entonces, $x_j = y_j$.

Sea $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ el único punto en la intersección $\cap_{m=1}^{\infty} C_m$.

Para cada $m \in \{2, 3, \dots\}$, tomemos un elemento $z^{(m)} = \left(z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}\right) \in K \cap C_m$, entonces tanto z como $z^{(m)}$ pertenecen a la celda C_m, así que, para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, se tiene:

$$\left| z_j^{(m)} - z_j \right| \leq L^{(m)}$$

Por lo tanto:

$d\left(z^{(m)}, z\right) = \sqrt{\left(z_1^{(m)} - z_1\right)^2 + \left(z_2^{(m)} - z_2\right)^2 + \cdots + \left(z_n^{(m)} - z_n\right)^2}$

$\leq L^{(m)} \sqrt{n} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L \sqrt{n}$

Así que la sucesión $\left(z^{(m)}\right)_{m\in\{2,3,\dots\}}$ converge a z.

Además, $z^{(m)} \in K$ para cualquier $m \in \{2, 3, \dots\}$, así que, como K es cerrado, $z = \text{lím}_{m\to\infty}$ $z^{(m)} \in K$.

Por hipótesis, $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, así que, teniendo $z \in K$, existe algún conjunto G_{γ_0} tal que $z \in G_{\gamma_0}$. Siendo G_{γ_0} un conjunto abierto, existe una bola abierta, $B_r(z)$, con centro z y un radio positivo r tal que $B_r(z) \subset G_{\gamma_0}$.

Por otra parte, como z es el centro de la bola $B_r(z)$, tomando $h = \frac{r}{2\sqrt{n}}$, la celda $[z_1 - h, z_1 + h] \times [z_2 - h, z_2 + h] \times \cdots \times [z_n - h, z_n + h]$ está contenida en $B_r(z)$. En efecto, si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [z_1 - h, z_1 + h] \times [z_2 - h, z_2 + h] \times \cdots \times [z_n - h, z_n + h]$, entonces, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, se tiene $|x_j - z_j| \leq h$, así que:

$$d(x, z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} \leq h\sqrt{n} = \tfrac{r}{2}$$

Tomemos $m_0 \in \{2, 3, \dots\}$ tal que $L^{(m_0)} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L < h$, entonces, como $z \in C_{m_0} = \left[a_1^{(m)}, b_1^{(m)}\right] \times \left[a_2^{(m)}, b_2^{(m)}\right] \times \cdots \times \left[a_n^{(m)}, b_n^{(m)}\right]$,

si $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ es cualquier elemento de C_{m_0} se tiene, para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$|y_j - z_j| \leq L^{(m_0)}$$

Así que:

$$d(y,z)=\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2+\cdots+(y_n-z_n)^2}\leq L^{(m_0)}\sqrt{n}<h\sqrt{n}=\tfrac{r}{2}$$

Por lo tanto, la celda C_{m_0} está contenida en la bola $B_r(z)$, la cual a su vez está contenida en G_{γ_0}. En particular, se tiene $K\cap C_{m_0}\subset G_{\gamma_0}$.

Hemos llegado a una contradicción ya que construimos la sucesión $(C_m)_{m\in\{2,3,\ldots\}}$ de tal forma que, para cualquier $m\in\{2,3,\ldots\}$, no existe algún conjunto $U\in\mathbb{U}$ tal que $K\cap C_m\subset\bigcup_{u\in U}G_u$.

Por lo tanto, la hipótesis de la que partimos, a saber, que no existe algún conjunto $U\in\mathbb{U}$ tal que $K\subset\bigcup_{u\in U}G_u$, es falsa.

Así que existe algún conjunto $U\in\mathbb{U}$ tal que $K\subset\bigcup_{u\in U}G_u$, lo cual prueba el resultado.

■

Si un conjunto K no es cerrado y acotado entonces no tiene la propiedad que se enuncia en el teorema de Heine-Borel; en otras palabras existe una cubierta de K de la cual no se puede extraer una subcubierta finita. Por ejemplo:

1. Si, en $\mathbb{R}$, tomamos K como el intervalo abierto y acotado (a,b), con $a<b$, la familia de intervalos abiertos $\left\{\left(a,b-\frac{b-a}{n}\right):n\in\{2,3,\ldots\}\right\}$ forman una cubierta de K, de la cual no se puede extraer una subcubierta finita.

2. Si, en $\mathbb{R}$, tomamos K como el intervalo no acotado $[a,\infty)$, la familia de intervalos abiertos $\{(a,a+n):n\in\mathbb{N}\}$ forman una cubierta de K, de la cual no se puede extraer una subcubierta finita.

El inverso del teorema de Heine-Borel es válido en cualquier espacio métrico; y lo es no únicamente para los conjuntos compactos, sino también para los que son numerablemente compactos, lo cual demostramos a continuación.

Proposición 3. *Sea K un subconjunto numerablemente compacto de un espacio métrico X, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración

Tomemos un elemento cualquiera $z\in X$. La familia de bolas abiertas $\{B_m(z):m\in\mathbb{N}\}$ forman una cubierta de K, así que existe un subconjunto finito U de números naturales tales que $K\subset\bigcup_{m\in U}B_m(z)$. Si $m_0=\max U$, entonces $\bigcup_{m\in U}B_m(z)=B_{m_0}(z)$, así que $K\subset B_{m_0}(z)$ y, por lo tanto, está acotado.

Para demostar que K es cerrado, tomemos un elemento cualquiera $y \in K^c$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por G_m al complemento de la bola cerrada $\overline{B}_{\frac{1}{m}}(y)$, de centro y y radio $\frac{1}{m}$. Se tiene entonces:

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{B}^c_{\frac{1}{m}}(y) = \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{B}_{\frac{1}{m}}(y)\right)^c = (\{y\})^c = X - \{y\}$$

Así que, como $y \notin K$, entonces $K \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m$.

Como los conjuntos G_m son abiertos, existe un subconjunto finito U de números naturales tales que $K \subset \bigcup_{m\in U} G_m$. Si $m_0 = \max U$, entonces $\bigcup_{m\in U} G_m = G_{m_0}$, así que $K \subset G_{m_0}$. Por lo tanto, $B_{\frac{1}{m_0}}(y) \subset \overline{B}_{\frac{1}{m_0}}(y) = G^c_{m_0} \subset K^c$.

Así que, dado $y \in K^c$, existe una bola abierta de centro y, contenida en K^c; es decir, todos los puntos de K^c son interiores a K^c, así que K^c es abierto y, por lo tanto, K es cerrado.

■

Conjuntos compactos y secuencialmente compactos

Vamos a demostrar que, en cualquier espacio métrico X, un subconjunto K de X es compacto si y sólo si es secuencialmente compacto; y también que un subconjunto K de X es compacto si y sólo si es numerablemente compacto

En lo que sigue, (X, d) es un espacio métrico cualquiera.

Proposición 4. *Sea K un subconjunto de X secuencialmente compacto, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración

Si K no fuera acotado, dada cualquier bola abierta $B_r(x)$, de centro $x \in X$ y radio $r \in (0, \infty)$, existiría algún elemento de K que no pertenecería a esa bola.

Suponiendo entonces que K no es acotado, definamos, inductivamente, una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de K y una sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos tales que :

i) $x_i \in K - B_{r_i}(x_0)$

i) $r_i = d(x_{i-1}, x_0) + 1$

donde tomamos $x_0 \in X$, fijo.

Definamos $r_1 = 1$ y x_1 como cualquiera de los elementos de K que no pertenecen a la bola $B_{r_1}(x_0)$. Obviamente, x_1 y r_1 satisfacen las propiedades i y ii.

Tomemos ahora $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que tenemos definidos x_k y r_k satisfaciendo las propiedades i y ii.

Definamos $r_{k+1} = d(x_k, x_0) + 1$ y x_{k+1} como cualquiera de los elementos de K que no pertenecen a la bola $B_{r_{k+1}}(x_0)$. Obviamente, x_{k+1} y r_{k+1} satisfacen las propiedades i y ii.

Así que, por el principio de inducción matemática, quedan definidas las sucesiones $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo las propiedades i y ii.

Para cualquier $j \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$d(x_{j+1}, x_0) \geq r_{j+1} = d(x_j, x_0) + 1$$

Así que, si x_j es cualquier elemento de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$d(x_{j+k}, x_0) \geq d(x_{j+k-1}, x_0) + 1 \geq d(x_{j+k-2}, x_0) + 2 \geq \cdots \geq d(x_j, x_0) + k$$

Además:

$$d(x_{j+k}, x_0) \leq d(x_{j+k}, x_j) + d(x_j, x_0)$$

Así que:

$$d(x_{j+k}, x_j) \geq d(x_{j+k}, x_0) - d(x_j, x_0) \geq d(x_j, x_0) + k - d(x_j, x_0) = k$$

Por lo tanto, la distancia entre dos elementos cualesquiera de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es mayor o igual a 1, así que no existe alguna subsucesión convergente de esa sucesión, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto, K es acotado.

Por otra parte, si K no tiene puntos de acumulación, entonces es cerrado.

Si el conjunto de puntos de acumulación de K es no vacío, sea x cualquiera de esos puntos, entonces existe una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de K que converge a x; por lo tanto cualquier subsucesión de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge también a x. Pero, por la hipótesis de la proposición, existe una subsucesión de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a algún elemento que pertenece a K; por lo tanto $x \in K$. Así que, K contiene a todos sus puntos de acumulación. Por lo tanto, también en este caso, K es un conjunto cerrado.

■

Proposición 5. *Sea* $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de subconjuntos de* X*, numerablemente compactos con la propiedad de la intersección finita, entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$*.*

Demostración

Supongamos $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = X$. Así que $K_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c$ para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitraria, entonces, como K_{n_0} es numerablemente compacto, existen $n_1 \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $K_{n_0} \subset \bigcup_{k=1}^{m} K_{n_k}^c$. Entonces:

$$\bigcap_{k=0}^{m} K_{n_k} = K_{n_0} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} K_{n_k}^c\right)^c = \emptyset$$

lo cual es una contradicción.

■

Proposición 6. *Sea* $\{K_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *una familia de subconjuntos compactos de* X*, con la propiedad de la intersección finita, entonces* $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma \neq \emptyset$*.*

Demostración

Supongamos $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma = \emptyset$, entonces $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma^c = X$. Así que $K_{\gamma_0} \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma^c$ para cualquier $\gamma_0 \in \Gamma$. Sea $\gamma_0 \in \Gamma$ arbitraria, entonces, como K_{γ_0} es compacto, existen $\gamma_1 \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $K_{\gamma_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n} K_{\gamma_k}^c$. Entonces:

$$\bigcap_{k=0}^{n} K_{\gamma_k} = K_{\gamma_0} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} K_{\gamma_k}^c\right)^c = \emptyset$$

lo cual es una contradicción.

■

Proposición 7. *Sea* $K \subset X$ *cerrado. Supongamos que cualquier familia numerable de subconjuntos cerrados de* K *con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía. Entonces* K *es numerablemente compacto.*

Demostración

Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos abiertos tales que $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$.

Si $K \cap E_n^c \neq \emptyset$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces la familia de conjuntos cerrados $\{K \cap E_n^c\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por lo tanto, $K \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (K \cap E_n^c) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $K \cap E_n^c = \emptyset$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, así que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Así que K es numerablemente compacto.

■

Proposición 8. *Sea $K \subset X$ cerrado. Supongamos que cualquier familia de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía. Entonces K es compacto.*

Demostración

Sea $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de subconjuntos abiertos tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ y S la familia de los subconjuntos finitos de Γ.

Para cada $T \in S$, definamos $E_T = \bigcup_{\gamma\in T} G_\gamma$.

Si $K \cap E_T^c \neq \emptyset$ para cualquier $T \in S$, entonces la familia de conjuntos cerrados $\{K \cap E_T^c\}_{T\in S,}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por lo tanto, $K \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (K \cap E_T^c) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $K \cap E_T^c = \emptyset$ para algún $T \in S$, así que $K \subset \bigcup_{\gamma\in T} G_\gamma$ para algún $T \in S$.

Así que K es compacto.

■

Corolario 1. *Un conjunto cerrado $K \subset X$ es numerablemente compacto si y sólo si cualquier familia numerable de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía.*

Corolario 2. *Un conjunto cerrado $K \subset X$ es compacto si y sólo si cualquier familia de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía.*

Teorema 1. *Un conjunto $K \subset X$ es secuencialmente compacto si y sólo si es numerablemente compacto.*

Demostración

Supongamos que K es secuencialmente compacto y sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $H_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$ y tomemos $x_n \in H_n$.

Obsérvese que, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_j$ para cualquier $n \geq j$.

Como K es secuencialmente compacto, existe una subsucesión convergente, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Si $j \in \mathbb{N}$ y $k \geq j$, entonces $n_k \geq j$, así que $x_{n_k} \in F_j$. Por lo tanto, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Así que K es numerablemente compacto.

Inversamente, supongamos que K es numerablemente compacto y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de K.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $C_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Entonces, la familia de conjuntos cerrados $\left\{\overline{C_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n} \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_m \in C_n$ tal que $d(x_m, x) < \frac{1}{n}$. Podemos definir entonces inductivamente una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Así que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Por lo tanto, K es secuencialmente compacto.

■

Proposición 9. *Sea $K \subset X$ un conjunto secuencialmente compacto. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $T \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{x\in T} B_{\varepsilon}(x)$.*

Demostración

Supongamos que para alguna $\varepsilon > 0$ se tiene que $K \cap \left(\bigcup_{x\in T} B_{\varepsilon}(x)\right)^c \neq \emptyset$ para cualquier conjunto finito $T \subset K$. Sea $x_1 \in K$ arbitrario y definamos inductivamente una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tal que $x_{k+1} \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{\varepsilon}^c(x_j)$, es decir, $d(x_{k+1}, x_j) \geq \varepsilon$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$. Se tiene entonces $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ distintas. Así que no existe ninguna subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lo cual es una contradicción ya que K es secuencialmente compacto.

■

Corolario 3. *Si $K \subset X$ es un conjunto secuencialmente compacto, entonces es totalmente acotado.*

Proposición 10. *Sea $K \subset X$ un conjunto secuencialmente compacto. Entonces K contiene un subconjunto denso numerable.*

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea T_n un subconjunto finito de K tal que $K \subset \bigcup_{x\in T_n} B_{\frac{1}{n}}(x)$. Definamos $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$.

Si $x \in K$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in T_n \subset T \subset K$ tal que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Así que $x \in \overline{T}$, es decir, $K = \overline{T}$.

■

Proposición 11. *Si $A \subset X$ es totalmente acotado y $H = \{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X cuya unión cubre A, entonces existe una colección numerable de conjuntos $G\gamma \in H$ cuya unión sigue cubriendo A.*

Demostración

Si A es vacío el resultado es trivial; así que asumiremos que $A \neq \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea B_n un subconjunto finito de X tal que la unión de las bolas cerradas de centro cada uno de los puntos de B_n y radio $\frac{1}{n}$ cubre A y sea $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Definamos:

$$M = \left\{(n, y) : n \in \mathbb{N},\, y \in B_n \text{ y existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \overline{B}_{\frac{1}{n}}(y) \subset G_\gamma\right\}$$

Como $A \subset \bigcup_{\gamma \in T} G_\gamma$, dado $x \in A$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $x \in G_\gamma$. Siendo G_γ abierto, existe una bola $B_r(x)$ contenida en G_γ. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$.

Como $A \subset \bigcup_{y \in B_n} \overline{B}_{\frac{1}{n}}(y)$, existe $y \in B_n$ tal que $x \in \bar{B}_{\frac{1}{n}}(y)$. Entonces, si $z \in \overline{B}_{\frac{1}{n}}(y)$, se tiene:

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < r$$

Así que $z \in B_r(x)$; por lo tanto:

$$\overline{B}_{\frac{1}{n}}(y) \subset B_r(x) \subset G_\gamma$$

Hemos demostrado entonces que, dado $x \in A$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y \in B_n$ tales que $(n, y) \in M$ y $x \in \bar{B}_{\frac{1}{n}}(y)$.

En particular, lo anterior demuestra que el conjunto M es no vacío y, obviamente, es un conjunto numerable.

Denotemos por (r_1, s_1), (r_2, s_2), $\ldots$ los elementos de M.

Para cada $(r_k, s_k) \in M$, tomemos un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $\bar{B}_{\frac{1}{r_k}}(s_k) \subset G_\gamma$ y denotemos ese elemento por γ_k.

Con esta notación, podemos enunciar el resultado anterior de la siguiente manera:

Para cada $x \in A$, existe un elemento (r_k, s_k) tal que $x \in \bar{B}_{\frac{1}{r_k}}(s_k) \subset G_{\gamma_k}$.

Por lo tanto, $A \subset \bigcup_k G_{\gamma_k}$, lo cual demuestra el resultado

$\blacksquare$

Teorema 2. *Un conjunto $K \subset X$ es secuencialmente compacto si y sólo si es compacto.*

Demostración

Si K es compacto, entonces es numerablemente compacto, así que, por el teorema 1, es secuencialmente compacto.

Inversamente, si K es secuencialmente compacto, entonces, por el teorema 1, es numerablemente compacto. Además, por el corolario 3, también es totalmente acotado, así que, por la proposición 11, si $H = \{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X cuya unión cubre A, entonces existe un conjunto numerable $\Psi \subset \Gamma$ tal que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Psi} G_\gamma$. Por lo tanto, siendo K numerablemente compacto, existe un conjunto finito $T \subset \Psi$ tal que $K \subset \bigcup_{\gamma\in T} G_n$. Lo cual demuestra que K es compacto.

Corolario 4. *Si K es un subconjunto de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

$i)$ K es compacto.

$ii)$ K es numerablemente compacto.

$iii)$ K es secuencialmente compacto.

En el caso de cualquier espacio métrico, no siempre los conjuntos cerrados y acotados son compactos. Por ejemplo consideremos el conjunto:

$$\mathbf{F} = \{f : [c, d] \mapsto \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$$

donde c y d son dos números reales tales que $c < d$.

Si $f \in \mathbf{F}$, definamos $\|f\|_s = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ y si $f, g \in \mathbf{F}$, definamos $d_s(f, g) = \|g - f\|_s$. Sabemos que $(\mathbf{F}, d_s)$ es un espacio métrico (completo).

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos distintos en $[c, d]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [c, d] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene $\|f_n\|_s = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $d_s(f_n, f_m) = 1$ para cualquier pareja de números naturales, m y n, tales que $n \neq m$.

Evidentemente, el conjunto $K = \{f_1, f_2, \ldots\}$ es acotado.

Además, K no tiene puntos de acumulación. En efecto, ninguna de las funciones f_n puede ser punto de acumulación de K, ya que, dada cualquiera de ellas, la bola con centro en esa función y radio $\frac{1}{2}$ no contiene alguna otra función en K. Ahora, si una función f en $\mathbf{F}$, que no pertenece a K, fuera punto de acumulación de K, entonces existirían dos funciones f_{n_1} y f_{n_2} en K tales que:

$$0 < d_s\left(f_{n_1}, f\right) < \tfrac{1}{4}$$

$$0 < d_s\left(f_{n_2}, f\right) < d_s\left(f_{n_1}, f\right)$$

En efecto, consideremos una bola abierta de centro f y radio $\frac{1}{4}$. Esas bola contiene algún elemento f_{n_1} de K.

Por la última desigualdad, se tendría $f_{n_1} \neq f_{n_2}$, así que $d_s\left(f_{n_1}, f_{n_2}\right) = 1$.

Por otra parte, se tendría:

$$d_s\left(f_{n_1}, f_{n_2}\right) \leq d_s\left(f_{n_1}, f\right) + d_s\left(f, f_{n_2}\right) < 2d_s\left(f_{n_1}, f\right) < \tfrac{1}{2}$$

llegando así a una contradicción.

Siendo vacío el conjunto de puntos de acumulación de K, podemos concluir que K es cerrado.

Tenemos entonces que el conjunto K es cerrado y acotado.

Ahora bien, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la bola abierta de radio $\frac{1}{4}$ y centro f_n. La unión de esas bolas contiene a K, pero la unión de cualquier colección finita de esas bolas únicamente contiene un número finito de elementos de K, a saber, los centros de ellas. Por lo tanto, K no es compacto.

El mismo ejemplo nos sirve para mostrar que un conjunto acotado no siempre es totalmente acotado.

Consideremos el subconjunto de $\mathbf{F}$ formado por las funciones f_n $(n \in \mathbb{N})$ tales que el conjunto $K = \{f_1, f_2, \ldots\}$ es cerrado y acotado pero no compacto.

El conjunto K no es totalmente acotado; en efecto, como $\left\|f_n\right\|_s = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $d_s\left(f_n, f_m\right) = 1$ para cualquier pareja de números naturales, m y n, tales que $n \neq m$, entonces para $\varepsilon = \frac{1}{4}$, cualquier bola cerrada de radio ε contiene a lo más un elemento de K, ya que si f y g pertenecen a esa bola y h es su centro, entonces:

$$d\left(f, g\right) \leq d\left(f, h\right) + d\left(h, g\right) \leq \tfrac{1}{2}$$

Por lo tanto, no existe un conjunto finito de bolas cerradas de radio $\varepsilon = \frac{1}{4}$ cuya unión cubra K.

Caracterización de los conjuntos compactos en espacios métricos completos

Definición 9. *Diremos que $A \subset X$ es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.*

Por la proposición 3, el teorema 2 y el corolario 3, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 12. *Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces es cerrado y totalmente acotado.*

Proposición 13. *Un conjunto $B \subset X$ es totalmente acotado si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B contiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración

Supongamos que B es totalmente acotado y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de B.

Tomemos un conjunto finito $T_1 \subset X$ tal que $K \subset \bigcup_{x\in T_1} B_1(x)$. Siendo T_1 finito, por lo menos una de las bolas $B_1(x)$, con $x \in T_1$, contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $B_1(x_1)$ una de esas bolas.

Tomemos ahora un conjunto finito $T_2 \subset X$ tal que $K \subset \bigcup_{x\in T_2} B_{\frac{1}{2}}(x)$. Siendo T_2 finito, por lo menos una de las bolas $B_{\frac{1}{2}}(x)$, con $x \in T_2$, es tal que $B_1(x_1) \cap B_{\frac{1}{2}}(x)$ contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $B_{\frac{1}{2}}(x_2)$ una de esas bolas.

Mediante ese proceso podemos definir inductivamente una sucesión de bolas $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\bigcap_{k=1}^{n} B_{\frac{1}{k}}(x_k)$ contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Tomemos $y_{n_1} \in B_1(x_1)$ y definamos inductivamente una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $y_{n_k} \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{\frac{1}{j}}(x_j)$. Se tiene entonces $d(y_{n_k}, x_j) < \frac{1}{j}$ para cualquier $j \in \{1, \dots, k\}$; así que, fijando $j \in \mathbb{N}$, se tiene $d(y_{n_k}, x_j) < \frac{1}{j}$ para cualquier $k \geq j$.

Por lo tanto, fijando $j \in \mathbb{N}$, se tiene $d(y_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{2}{j}$ para cualesquiera $k, m \geq j$. Así que la sucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Supongamos ahora que B no es totalmente acotado. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $K \cap \left(\bigcup_{x\in T} B_\varepsilon(x)\right)^c \neq \emptyset$ para cualquier conjunto finito $T \subset X$ (en particular, para cualquier conjunto finito $T \subset K$). Sea $x_1 \in K$ arbitrario y definamos inductivamente una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tal que $x_{k+1} \in \bigcap_{j=1}^{k} B_\varepsilon^c(x_j)$, es decir, $d(x_{k+1}, x_j) \geq \varepsilon$ para cualquier $j \in \{1, \dots, k\}$. Se tiene entonces $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ distintas. Así que no existe ninguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que sea de Cauchy.

∎

Proposición 14. *Un conjunto $B \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B existe una subsucesión convergente.*

Demostración

Si B es relativamente compacto, entonces $\overline{B}$ es secuencialmente compacto, así que toda sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B contiene una subsucesión convergente (a algún punto de $\overline{B}$).

Inversamente, supongamos que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B existe una subsucesión convergente y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\overline{B}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $z_n \in B$ tal que $d(y_n, z_n) < \frac{1}{n}$. Tal z_n existe pues si $y_n \in B$ podemos tomar $z_n = y_n$ y si $y_n \notin B$ entonces y_n es punto de acumulación de B.

Sea ahora $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $z = \lim_{k\rightsquigarrow\infty} z_{n_k}$. Entonces, como:

$d(y_{n_k}, z) \leq d(y_{n_k}, z_{n_k}) + d(z_{n_k}, z) < d(z_{n_k}, z) + \frac{1}{n_k}$

se tiene $z = \lim_{k\rightsquigarrow\infty} y_{n_k}$.

Además, como $\overline{B}$ es cerrado, $z \in \overline{B}$.

Por lo tanto, para toda sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\overline{B}$ existe una subsucesión convergente a algún elemento de $\overline{B}$. Es decir, $\overline{B}$ es secuencialmente compacto y, por lo tanto, compacto.

$\blacksquare$

Corolario 5. *Si X es completo, entonces un conjunto $K \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración

Supongamos que K es relativamente compacto y tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquiera de elementos de K; entonces, por la proposición 14, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente y, por lo tanto, de Cauchy; así que por la proposición 13, K es totalmente acotado.

Inversamente, supongamos que K es totalmente acotado y tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquiera de elementos de K ; entonces, por la proposición 13, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es de Cauchy. Siendo X completo, esa subsucesión es convergente; así que, por la proposición 14, K es relativamente compacto.

$\blacksquare$

Corolario 6. *Si X es completo, entonces cualquier conjunto $K \subset X$ cerrado y totalmente acotado, es compacto.*

Demostración

Si $K \subset X$ es un conjunto cerrado y totalmente acotado, entonces, por el corolario 5, es relativamente compacto; así que $K = \overline{K}$ es compacto.

■

Por la proposición 12 y el corolario 6 se tiene entonces el siguiente resultado:

Teorema 3. *Si X es completo, un conjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente acotado.*

Si X no es completo, es posible que haya subconjuntos cerrrados y totalmente acotados que no sean compactos. Por ejemplo, tomemos $X = \mathbb{Q}$ con la distancia usual entre números reales; entonces el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ 2 < x^2 < 3\}$ es cerrado y totalmente acotado, pero no compacto.